

Références :

Analyse, Xavier Gourdon

Théo. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Soit $f_n : I \mapsto E$ une suite de fonctions. Supposons que

- (i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
- (ii) $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I .
- (iii) $\sum_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément sur tout segment de I .

Alors

- $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I ,
- $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$,
- $(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

Théo. Soit $f : I \times X \mapsto \mathbb{R}$ une application. Supposons que

- (i) pour tout $u \in I$, $x \mapsto f(u, x) \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu)$,
- (ii) $\mu(dx) - pp, u \mapsto f(u, x)$ est dérivable sur tout l'intervalle I ,
- (iii) $\mu(dx) - pp$, pour tout $u \in I$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \right| \leq g(x) \text{ avec } g \in L^1_{\mathbb{R}}(\mu),$$

alors la fonction $F(u) = \int_X f(u, x) \mu(dx)$ est définie et dérivable sur tout l'intervalle I , de dérivée

$$F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \mu(dx).$$

Théo. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $|x| \mapsto +\infty$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f^*(n) e^{2i\pi n x} \text{ où } \forall n \in \mathbb{Z}, f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt.$$

Démonstration.

Montrons que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge normalement (donc uniformément) sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Si $M > 0$ est tel que $|f(x)| \leq \frac{M}{x^2}$ pour $|x| \geq 1$, il suffit d'écrire pour tout $K > 0$, pour tout $x \in [-K, K]$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|n| > K+1$,

$$|f(x+n)| \leq \frac{M}{(x+n)^2} \leq \frac{M}{(|n| - K)^2}.$$

On a donc aussi que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x+n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On note F sa limite simple.

De même, la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$. On applique donc le théorème de dérivation qui entraîne que F est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R}$.

On sait aussi que F est 1-périodique. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=-N}^N f(x+1+n) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} f(x+n).$$

On fait tendre $N \mapsto +\infty$ et on obtient $F(x+1) = F(x)$.

On cherche maintenant à calculer les coefficients de Fourier de F . Soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} c_n(F) &= \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t} dt \\ &\stackrel{\text{interversion possible car la série de fonctions définissant } F \text{ converge uniformément sur le compact } [0,1]}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(t+k) e^{-2i\pi n t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} f(t) e^{-2i\pi n t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi n t} dt \\ &= f^*(n) \end{aligned}$$

Comme, de plus, F est de classe $\mathcal{C}^1$, sa série de Fourier converge uniformément vers F . $\square$

App. Soit $s > 0$,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = s^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}.$$

Démonstration. Soit $s > 0$. Nous appliquons la formule sommatoire de Poisson à la fonction $f : x \mapsto e^{-\pi s x^2}$. Les coefficients $f^*(n)$ sont donnés par, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$f^*(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s t^2} e^{-2i\pi n t} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi n u}{\sqrt{\pi s}}} du$$

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{u^2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}}}_{h(x,u)} du$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u \mapsto h(x, u)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- Pour presque tout $u \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x, u)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial h}{\partial x}(u, x) \right| &= \left| e^{-u^2} \frac{2i\pi u}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} \right| \\ &= \frac{2\pi |u|}{\sqrt{\pi s}} e^{-u^2} \in L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

On a donc

$$I'(x) = -\frac{2i\pi}{\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-u^2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} du.$$

On fait une intégration par parties pour $I'(x)$ avec

$$\begin{aligned} v(u) &= e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} & v'(u) &= -\frac{2i\pi x}{\sqrt{\pi s}} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} \\ w'(u) &= u e^{-u^2} & w(u) &= -\frac{1}{2} e^{-u^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I'(x) &= \underbrace{\left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} e^{-u^2} \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \frac{2\pi x}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2i\pi x u}{\sqrt{\pi s}}} e^{-u^2} du \\ &= -\frac{2\pi x}{s} I(x) \end{aligned}$$

Ainsi, I vérifie l'équation différentielle :

$$I'(x) + \frac{2\pi x}{s} I(x) = 0.$$

On obtient donc

$$I(x) = I(0) e^{-\frac{\pi x^2}{s}} = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\pi x^2}{s}}.$$

En réinjectant cette expression dans le calcul précédent, on a donc

$$f^*(n) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\pi n^2}{s}}.$$

Il ne reste qu'à appliquer la formule sommatoire de Poisson pour $x = 0$. $\square$

Leçons possibles : 241 - 246